

Chuyên đề : **HÀM SỐ MŨ - HÀM SỐ LÔGARÍT**
PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH
CÓ CHỨA MŨ VÀ LOGARÍT
TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ HÀM SỐ MŨ

1. Các định nghĩa:

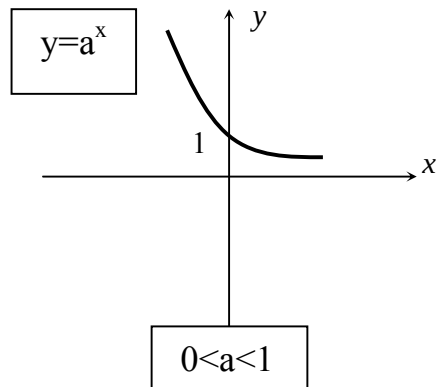
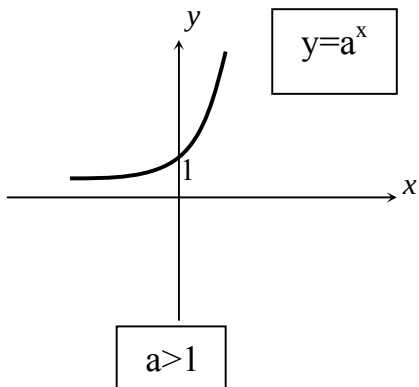
- $a^n = \underbrace{a.a...a}_{n \text{ thừa số}} \quad (n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 1, a \in \mathbb{R})$
- $a^1 = a \quad \forall a$
- $a^0 = 1 \quad \forall a \neq 0$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 1, a \in \mathbb{R} / \{0\})$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0; m, n \in \mathbb{N})$
- $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

2. Các tính chất :

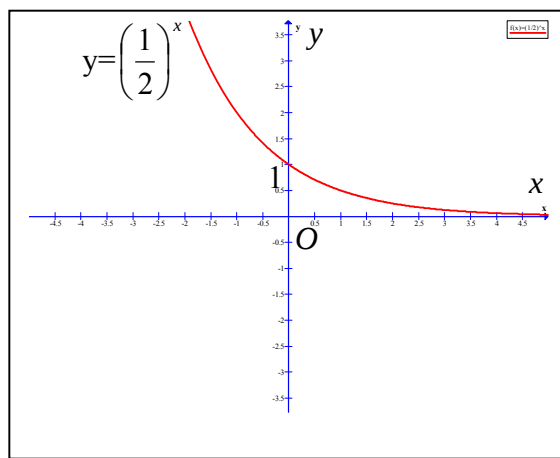
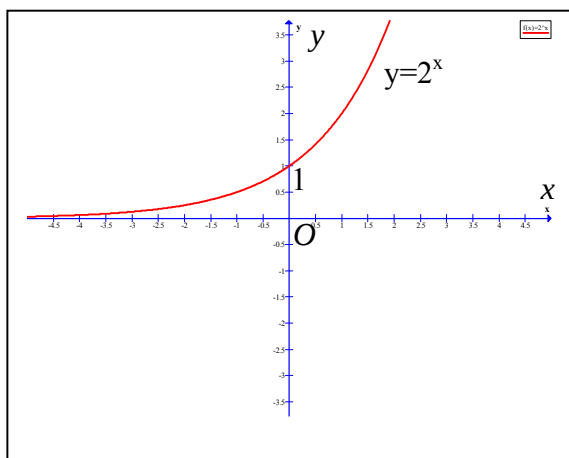
- $a^m . a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m.n}$
- $(a.b)^n = a^n . b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

3. Hàm số mũ: Dạng : $y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$
- Tập giá trị : $T = \mathbb{R}^+ \quad (a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R})$
- Tính đơn điệu:
 - * $a > 1$: $y = a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$
 - * $0 < a < 1$: $y = a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$
- Đồ thị hàm số mũ :



Minh họa:



II. KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ HÀM SỐ LÔGARÍT

1. Định nghĩa:

Với $a > 0$, $a \neq 1$ và $N > 0$

$$\log_a N = M \quad \overset{\text{dn}}{\Leftrightarrow} \quad a^M = N$$

Điều kiện có nghĩa:

$$\log_a N \text{ có nghĩa khi } \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ N > 0 \end{cases}$$

2. Các tính chất :

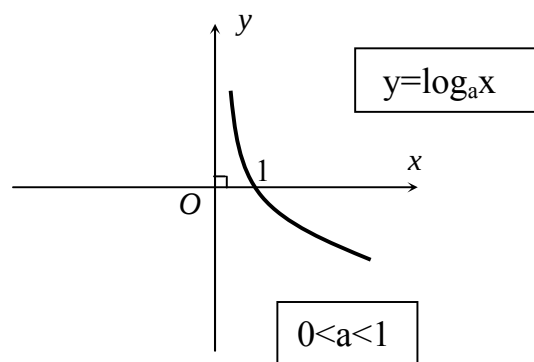
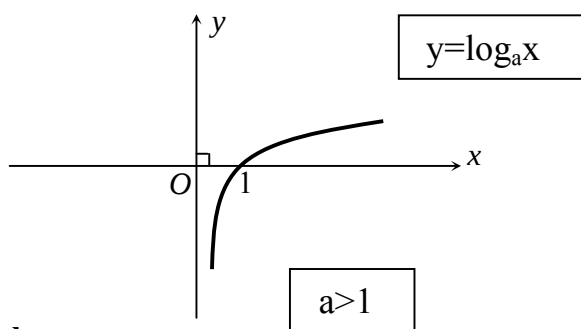
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a a^M = M$
- $a^{\log_a N} = N$
- $\log_a (N_1 \cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$
- $\log_a \left(\frac{N_1}{N_2}\right) = \log_a N_1 - \log_a N_2$
- $\log_a N^\alpha = \alpha \cdot \log_a N$ Đặc biệt: $\log_a N^2 = 2 \cdot \log_a |N|$

3. Công thức đổi cơ số :

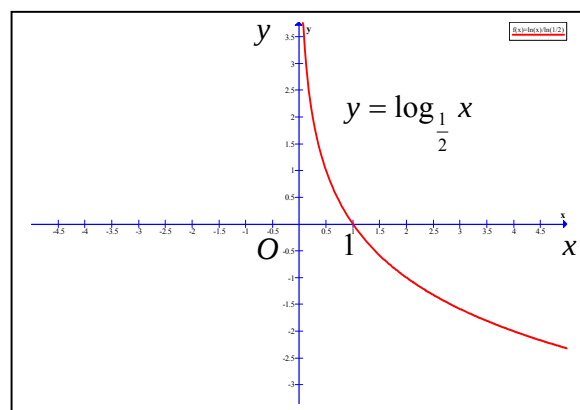
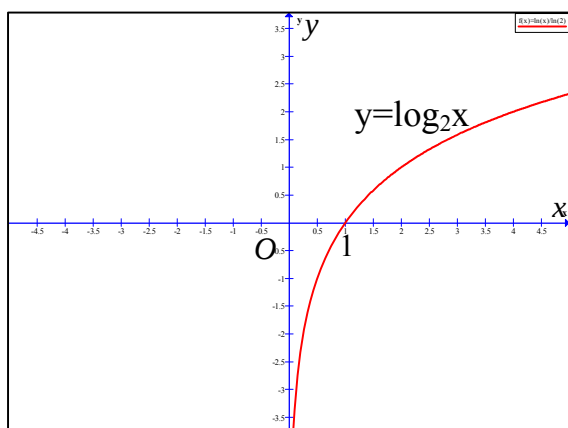
- $\log_a N = \log_a b \cdot \log_b N$
- $\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$
- * Hệ quả:
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ và $\log_{a^k} N = \frac{1}{k} \log_a N$

4. Hàm số logarit: Dạng $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}^+$
- Tập giá trị $T = \mathbb{R}$
- Tính đơn điệu:
 - * $a > 1$: $y = \log_a x$ đồng biến trên $\mathbb{R}^+$
 - * $0 < a < 1$: $y = \log_a x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}^+$
- Đồ thị của hàm số lôgarít:



Minh họa:



5. CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN:

- Định lý 1:** Với $0 < a \neq 1$ thì : $a^M = a^N \Leftrightarrow M = N$
- Định lý 2:** Với $0 < a < 1$ thì : $a^M < a^N \Leftrightarrow M > N$ (nghịch biến)
- Định lý 3:** Với $a > 1$ thì : $a^M < a^N \Leftrightarrow M < N$ (đồng biến)
- Định lý 4:** Với $0 < a \neq 1$ và $M > 0; N > 0$ thì : $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$
- Định lý 5:** Với $0 < a < 1$ thì : $\log_a M < \log_a N \Leftrightarrow M > N$ (nghịch biến)
- Định lý 6:** Với $a > 1$ thì : $\log_a M < \log_a N \Leftrightarrow M < N$ (đồng biến)

III. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ THƯỜNG SỬ DỤNG:

Dạng cơ bản: $a^x = m$ (1)

- $m \leq 0$: phương trình (1) vô nghiệm
- $m > 0$: $a^x = m \Leftrightarrow x = \log_a m$

1. Phương pháp 1: Biến đổi phương trình về dạng : $a^M = a^N$ (Phương pháp đưa về cùng cơ số)

Ví dụ 1 : Giải các phương trình sau :

- 1) $9^{x+1} = 27^{2x+1}$
- 2) $2^{x^2-3x+2} = 4$
- 3) $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$

Ví dụ 2 : Giải các phương trình sau

- 1) $16^{\frac{x+10}{x-10}} = 0,125 \cdot 8^{\frac{x+5}{x-15}}$
- 2) $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$

2. Phương pháp 2: Đặt ẩn phụ chuyển về phương trình đại số

Ví dụ : Giải các phương trình sau :

- 1) $3^{2x+8} - 4 \cdot 3^{x+5} + 27 = 0$
- 2) $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$
- 3) $5 \cdot 2^x = 7 \cdot \sqrt{10^x} - 2 \cdot 5^x$
- 4) $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 4$
- 5) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10$
- 6) $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3$
- 7) $3 \cdot 8^x + 4 \cdot 12^x - 18^x - 2 \cdot 27^x = 0$
- 8) $2 \cdot 2^{2x} - 9 \cdot 14^x + 7 \cdot 7^{2x} = 0$
- 9) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} - 6 = 0$
- 10) $4^{3+2\cos x} - 7 \cdot 4^{1+\cos x} - 2 = 0$

Bài tập rèn luyện:

- 1) $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 4$ ($x \pm 1$)
- 2) $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$ ($x=0$)
- 3) $125^x + 50^x = 2^{3x+1}$ ($x=0$)
- 4) $25^x + 10^x = 2^{2x+1}$ ($x=0$)
- 5) $(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x + (\sqrt{3-\sqrt{8}})^x = 6$ ($x = \pm 2$)
- 6) $27^x + 12^x = 2 \cdot 8^x$ ($x=0$)

3 Phương pháp 3: Biến đổi phương trình về dạng tích số $A \cdot B = 0, \dots$

Ví dụ : Giải phương trình sau :

- 1) $8 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^x = 24 + 6^x$

- 2) $2^{x^2+x} - 4 \cdot 2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$
- 3) $5^{2x+1} + 7^{x+1} - 175^x - 35 = 0$
- 4) $x^2 \cdot 2^{x-1} + 2^{|x-3|+6} = x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x+1}$
- 5) $4^{x^2+x} + 2^{1-x^2} = 2^{(x+1)^2} + 1$

4. **Phương pháp 4:** Lấy lôgarit hai vế theo cùng một cơ số thích hợp nào đó (Phương pháp lôgarit hóa)

Ví dụ : Giải phương trình

- 1) $3^{x-1} \cdot 2^{x^2} = 8 \cdot 4^{x-2}$
- 2) $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500$

5. **Phương pháp 5:** Nhắm nghiệm và sử dụng tính đơn điệu để chứng minh nghiệm duy nhất (thường là sử dụng công cụ đạo hàm)

* Ta thường sử dụng các tính chất sau:

- **Tính chất 1:** Nếu hàm số f tăng (hoặc giảm) trong khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x) = C$ có không quá một nghiệm trong khoảng $(a;b)$. (do đó nếu tồn tại $x_0 \in (a;b)$ sao cho $f(x_0) = C$ thì đó là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = C$)
- **Tính chất 2:** Nếu hàm f tăng trong khoảng $(a;b)$ và hàm g là hàm một hàm giảm trong khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x) = g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm trong khoảng $(a;b)$. (do đó nếu tồn tại $x_0 \in (a;b)$ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ thì đó là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = g(x)$)

Phương pháp chiều biến thiên hàm số

Ví dụ : Giải các phương trình sau :

- 1) $3^x + 4^x = 5^x$
- 2) $2^x = 1 + 3^{\frac{x}{2}}$
- 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 2x + 1$
- 4) $2^{\sqrt{3-x}} = -x^2 + 8x - 14$
- 5) $3 \cdot 25^{x-2} + (3x-10) \cdot 5^{x-2} + 3 - x = 0$

Bài tập rèn luyện:

- 1) $2 \cdot 2^x + 3 \cdot 3^x = 6^x - 1$ (x=2)
- 2) $2^x = 3 - x$ (x=1)

IV. **CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT THƯỜNG SỬ DỤNG:**

Dạng cơ bản: $\log_a x = m$ (1)

- $\forall m \in \mathbb{R} : \log_a x = m \Leftrightarrow x = a^m$

1. **Phương pháp 1:** Biến đổi phương trình về dạng : $\log_a M = \log_a N$ (đồng cơ số)

Ví dụ : Giải các phương trình sau :

- 1) $\log_2 \frac{1}{x} = \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - x - 1)$
- 2) $\log_2 [x(x-1)] = 1$

$$3) \log_2 x + \log_2 (x-1) = 1$$

Ví dụ : Giải các phương trình sau :

$$1) \log_x (x+6) = 3$$

$$2) \log_2 (4^x + 4) = x - \log_{\frac{1}{2}} (2^{x+1} - 3)$$

$$3) \frac{1}{2} \log_2 (x-1)^2 + \log_{\frac{1}{2}} (x+4) = \log_2 (3-x) \quad (x = -\sqrt{11}; x = -1 + \sqrt{14})$$

$$4) \frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}} (x+3) + \frac{1}{4} \log_4 (x-1)^8 = \log_2 (4x) \quad (x = 3; x = -3 + 2\sqrt{3})$$

$$5) \frac{3}{2} \log_{\frac{1}{4}} (x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}} (4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}} (x+6)^3 \quad (x = 2; x = 1 - \sqrt{33})$$

2. Phương pháp 2: Đặt ẩn phụ chuyển về phương trình đại số.

Ví dụ : Giải các phương trình sau :

$$1) \frac{6}{\log_2 2x} + \frac{4}{\log_2 x^2} = 3$$

$$2) \log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 = 0$$

$$3) \log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$$

$$4) \log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + \frac{1}{2}$$

$$5) \log_x (125x) \cdot \log_{25}^2 x = 1$$

$$6) \log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$$

$$7) \log_{5x} \frac{5}{x} + \log_5^2 x = 1$$

$$8) (x-2)^{\log_3 9(x-2)} = 9(x-2)^3$$

3 Phương pháp 3: Biến đổi phương trình về dạng tích số A.B=0,..

Ví dụ : Giải phương trình sau : $\log_2 x + 2 \cdot \log_7 x = 2 + \log_2 x \cdot \log_7 x$

4. Phương pháp 4: Nhẩm nghiệm và sử dụng tính đơn điệu để chứng minh nghiệm duy nhất. (thường là sử dụng công cụ đạo hàm)

* Ta thường sử dụng các tính chất sau:

- **Tính chất 1:** Nếu hàm số f tăng (hoặc giảm) trong khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x) = C$ có không quá một nghiệm trong khoảng $(a;b)$. (do đó nếu tồn tại $x_0 \in (a;b)$ sao cho $f(x_0) = C$ thì đó là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = C$)
- **Tính chất 2 :** Nếu hàm f tăng trong khoảng $(a;b)$ và hàm g là hàm một hàm giảm trong khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x) = g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm trong khoảng $(a;b)$. (do đó nếu tồn tại $x_0 \in (a;b)$ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ thì đó là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = g(x)$)

Phương pháp chiều biến thiên hàm số

Ví dụ : Giải các phương trình sau :

$$1) \log_2 (x^2 - x - 6) + x = \log_2 (x+2) + 4$$

$$2) \log_2 (x + 3^{\log_6 x}) = \log_6 x$$

$$3) \log_2 (1 + \sqrt{x}) = \log_3 x$$

V. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ THƯỜNG SỬ DỤNG:

1. Phương pháp 1: Biến đổi phương trình về dạng cơ bản : $a^M < a^N$ ($\leq, >, \geq$)

Ví dụ : Giải các bất phương trình sau :

$$1) 2^{3-6x} > 1$$

$$2) \left(\frac{1}{2}\right)^{-4x-11} > 2^{x^2+6x+8}$$

Ví dụ : Giải các bất phương trình sau :

$$1) 3^{\sqrt{x^2-2x}} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{x-|x-1|}$$

$$2) \frac{1}{2^{\sqrt{x^2-2x}}} \geq 2^{x-1}$$

2. Phương pháp 2: Đặt ẩn phụ chuyển về bất phương trình đại số.

Ví dụ : Giải các bất phương trình sau :

$$1) 9^x < 2 \cdot 3^x + 3$$

$$2) 5^{2x+1} > 5^x + 4$$

Ví dụ : Giải các phương trình sau :

$$1) 2^{2x} - 3 \cdot (2^{x+2}) + 32 < 0$$

$$2) 2^x + 2^{3-x} \leq 9$$

$$3) 3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{x+2} \leq 0$$

$$4) \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1} > 12$$

$$5) \sqrt{8 + 2^{1+x} - 4^x} + 2^{1+x} > 5 \quad (0 < x \leq 2)$$

$$6) \sqrt{15 \cdot 2^{x+1}} + 1 \geq |2^x - 1| + 2^{x+1} \quad (x \leq 2)$$

VI. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT THƯỜNG SỬ DỤNG:

1. Phương pháp 1: Biến đổi phương trình về dạng cơ bản : $\log_a M < \log_a N$ ($\leq, >, \geq$)

Ví dụ : Giải các bất phương trình sau :

$$1) \log_2 (x^2 + x - 2) > \log_2 (x + 3)$$

$$2) \log_{0,5} (4x + 11) < \log_{0,5} (x^2 + 6x + 8)$$

$$3) \log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 6x + 5) + 2 \log_3 (2 - x) \geq 0$$

$$4) \log_{\frac{1}{2}} x + 2 \log_{\frac{1}{4}} (x - 1) + \log_2 6 \leq 0$$

$$5) \log_{\frac{1}{2}} \log_3 \frac{x+1}{x-1} \geq 0$$

Ví dụ : Giải các bất phương trình sau :

$$1) \log_x (5x^2 - 8x + 3) > 2$$

$$2) \log_{\frac{2}{3}} \log_3 |x - 3| < 1$$

$$3) \log_{3x-x^2} (3-x) > 1$$

$$4) \log_x (\log_9 (3^x - 9)) \leq 1$$

$$5) \log_x (\log_3 (9^x - 72)) \leq 1$$

$$6) \log_5 (4^x + 144) - 4 \log_5 2 < 1 + \log_5 (2^{x-2} + 1)$$

$$7) \log_{\frac{1}{4}} (4^x + 4) \geq \log_{\frac{1}{2}} (2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x)$$

2. Phương pháp 2: Đặt ẩn phụ chuyển về bất phương trình đại số

Ví dụ : Giải bất phương trình sau :

$$1) \log_2^2 x + \log_2 x - 2 \leq 0$$

$$2) x^{\log_2 x + 4} < 32$$

$$3) 6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} \leq 12$$

$$4) \sqrt[3]{\log_{\frac{1}{2}} x} + \log_4 x^2 - 2 > 0$$

Ví dụ : Giải các phương trình sau :

$$1) \log_2 (3^x + 2) + 2 \cdot \log_{3^x+2} 2 - 3 > 0$$

$$2) \log_{2x} 64 + \log_{x^2} 16 \geq 3$$

$$3) \frac{(\log_2 x)^2 + 3}{\log_2 x + 3} > 2 \quad \left(\frac{1}{8} < x < \frac{1}{2} \right)$$

VII. HỆ PHƯƠNG TRÌNH:

Ví dụ: Giải các hệ phương trình

$$1) \begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 \\ 3\log_9(9x^2) - \log_3 y^3 = 3 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} (\sqrt{3})^{x-y} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2y} \\ \log_2(x-y) + \log_2(x-y) = 4 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} (\sqrt{x+1}-1)3^y = \frac{3\sqrt{4-x}}{x} \\ y + \log_3 x = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \frac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^y = 1152 \\ \log_{\sqrt{5}}(x+y) = 2 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2^x \cdot 4^y = 64 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x - 4|y| + 3 = 0 \\ \sqrt{\log_4 x} - \sqrt{\log_2 y} = 0 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 5 \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4 \end{cases}$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

DẠNG 1: Các bài toán giải phương trình và bất phương trình

Bài 1: Giải các phương trình

- 1) $2^{3x} - 6 \cdot 2^x - \frac{1}{2^{3(x-1)}} + \frac{12}{2^x} = 1$ (x=1)
- 2) $\log_4(x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8(4+x^3)$ (x=2; x=2-2√6)
- 3) $\log_7 x = \log_3(\sqrt{x}+2)$ (x=49)
- 4) $\log_5 x = \log_7(x+2)$ (x=5)
- 5) $5 \cdot 2^{3|x-1|} - 3 \cdot 2^{5-3x} + 7 = 0$ (x=1)
- 6) $\log_{\sqrt{2x-1}}|2x-3| = 2\log_8 4 + \log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (x=5/2)
- 7) $x^{\log_2 x^3 - \log_2^2 x - 3} = \frac{1}{x}$ (x=1, x=2, x=4)
- 8) $2x^{\log_2 x} + 2x^{-3\log_8 x} - 5 = 0$ (x=1/2, x=2)
- 9) $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$ (x=1/4, x=2)
- 10) $1 + 2\log_x 2 \cdot \log_4(10-x) = \frac{2}{\log_4 x}$ (x=2, x=8)

Bài 2: Giải các bất phương trình

- 1) $3^{2x} - 8 \cdot 3^{x+\sqrt{x+4}} - 9 \cdot 9^{\sqrt{x+4}} > 0$ (x>5)
- 2) $9^{\sqrt{x^2-2x-x}} - 7 \cdot 3^{\sqrt{x^2-2x-x-1}} \leq 2$ (-1/4 ≤ x ≤ 0 ∨ x ≥ 2)
- 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^6-2x^3+1}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$ (x < -1 ∨ 0 < x < 1 ∨ x > 1)
- 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x} - \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1} - 128 \geq 0$ (x ≤ -4/3)
- 5) $\log_5(1-2x) < 1 + \log_{\sqrt{5}}(x+1)$ (-2/5 < x < 1/2)
- 6) $\sqrt{2-|\log_2 x|} > \log_2 x$ (1/4 ≤ x < 2)
- 7) $\log_x \log_9(3^x - 9) < 1$ (x > log₃ 10)
- 8) $\frac{1}{\log_4(x^2 + 3x)} < \frac{1}{\log_2(3x-1)}$ (2/3 < x < 1)
- 9) $\frac{\log_1(x+3)^2 - \log_1(x+3)^3}{\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+1}} > 0$ (-2 < x < -1)

Bài 3 : Tìm tập xác định của các hàm số sau:

$$1. y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{3-2x-x^2}{x+2}} \quad 2. y = 2^{\sqrt{|x-3|-|8-x|}} + \sqrt{\frac{-\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{x^2-2x-8}}}$$

DẠNG 2: Sử dụng công cụ đại số giải các bài toán có chứa tham số

Bài 1: Với giá trị nào của m thì phương trình sau có nghiệm: $4^x - 4m.(2^x - 1) = 0$ ($m < 0 \vee m \geq 1$)

Bài 2: Cho phương trình: $4^x - m.2^{x+1} + 2m = 0$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 \neq x_2$ sao cho $x_1 + x_2 = 3$ (m=4)

Bài 3: Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm trái dấu: $(m+3).16^x + (2m-1)4^x + m+1 = 0$

$$\left(-1 < m < -\frac{3}{4}\right)$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN (GIẢI MẪU)

Bài 1: Giải phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x) = 1$ (1)

Bài giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x-1 > 0 \\ x+1 > 0 \\ 7-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \\ x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 7$$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) = \log_{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}(7-x)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow x^2-1 = \frac{1}{2}(7-x)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-1 = 49-14x+x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+14x-50=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-17 \end{cases}$$

So với điều kiện ta có nghiệm của pt(1) là $x=3$

Bài 2: Giải phương trình: $\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3$ (1)

Bài giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+2 \neq 0 \\ 4-x > 0 \\ x+6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x < 4 \\ x > -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < x < 4 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow 3\log_{\frac{1}{4}}|x+2| - 3 = 3\log_{\frac{1}{4}}(4-x) + 3\log_{\frac{1}{4}}(x+6)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}|x+2| - 1 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x) + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}(4|x+2|) = \log_{\frac{1}{4}}[(4-x)(x+6)]$$

$$\Leftrightarrow 4|x+2| = (4-x)(x+6)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+2) = (4-x)(x+6) \\ 4(x+2) = -(4-x)(x+6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x-16=0 \\ x^2-2x-32=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \vee x=-8 \\ x=1 \pm \sqrt{33} \end{cases}$$

So với điều kiện ta có nghiệm của pt(1) là $x=2 \vee x=1-\sqrt{33}$

Bài 3: Giải phương trình: $\log_2(x+2) + \log_4(x-5)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0$ (1)

Bài giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x+2 > 0 \\ x-5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \neq 5 \end{cases}$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \log_2(x+2) + \log_2|x-5| = \log_2 8$$

$$\Leftrightarrow \log_2[(x+2)|x-5|] = \log_2 8$$

$$\Leftrightarrow (x+2)|x-5| = 8$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ (x+2)(x-5) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x^2 - 3x - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x = -3 \vee x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $\begin{cases} x = 6 \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$

Bài 4: Giải phương trình: $\log_2|x-2| + \log_2|x+5| + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0$ (1)

Bài giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x+5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -5 \end{cases}$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \log_2|(x-2)(x+5)| = \log_2 8$$

$$\Leftrightarrow |(x-2)(x+5)| = 8$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+5) = 8 \\ (x-2)(x+5) = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 18 = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \vee x = 6 \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

So với điều kiện ta có nghiệm của pt(1) là $\begin{cases} x = -3 \vee x = 6 \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$

Bài 5: Giải phương trình: $\log_4 (x - 1) + \frac{1}{\log_{2x+1} 4} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x + 2}$ (1)

Bài giải:

Điều kiện:
$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ 2x + 1 > 0 \\ 2x + 1 \neq 1 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -\frac{1}{2} \\ x \neq 0 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2 (x - 1) + \frac{1}{2} \log_2 (2x + 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 (x + 2) \\ &\Leftrightarrow \log_2 [(x - 1)(2x + 1)] = \log_2 [2(x + 2)] \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(2x + 1) = 2(x + 2) \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

So với điều kiện ta có nghiệm của pt(1) là $x = \frac{5}{2}$

Bài 6: Giải phương trình: $4^{\log_2 2x} - x^{\log_2 6} = 2.3^{\log_2 4x^2}$ (1)

Bài giải:

Điều kiện: $x > 0$

Khi đó: $4^{\log_2 2x} - x^{\log_2 6} = 2.3^{\log_2 4x^2} \Leftrightarrow 4^{1+\log_2 x} - x^{\log_2 6} = 2.3^{2(1+\log_2 x)}$

Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow x = 2^t$, phương trình (2) trở thành:

$$\begin{aligned} 4^{1+t} - (2^t)^{\log_2 6} &= 2.3^{2(1+t)} \Leftrightarrow 4.4^t - (2^{\log_2 6})^t = 18.9^t \\ &\Leftrightarrow 4.4^t - 6^t = 18.9^t \Leftrightarrow 4 - \left(\frac{3}{2}\right)^t = 18 \left[\left(\frac{3}{2}\right)^t\right]^2 \\ &\Leftrightarrow 18 \left[\left(\frac{3}{2}\right)^t\right]^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^t - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{4}{9} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^t = -\frac{1}{2} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow t = -2 \end{aligned}$$

Với $t = -2$ ta được nghiệm của phương trình (1) là : $x = \frac{1}{4}$

Bài 7: Giải phương trình: $(2 - \log_3 x) \cdot \log_{9x} 3 - \frac{4}{1 - \log_3 x} = 1 \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 9x \neq 1 \\ \log_3 x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{9} \\ x \neq 3 \end{cases}$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2 - \log_3 x}{\log_3(9x)} - \frac{4}{1 - \log_3 x} = 1 \Leftrightarrow \frac{2 - \log_3 x}{2 + \log_3 x} - \frac{4}{1 - \log_3 x} = 1 \quad (2)$$

Đặt $t = \log_3 x$ ($t \neq -2; t \neq 1$), phương trình (2) trở thành:

$$\frac{2 - t}{2 + t} - \frac{4}{1 - t} = 1 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 4 \end{cases}$$

- Với $t = -1$ ta được pt : $\log_3 x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$
- Với $t = 4$ ta được pt : $\log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 81$

So với điều kiện ta được nghiệm của pt(1) là $x = \frac{1}{3}; x = 81$

Bài 8: Giải phương trình: $\log_3(3^x - 1) \cdot \log_3(3^{x+1} - 3) = 6 \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $3^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 3^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow \log_3(3^x - 1) \cdot [1 + \log_3(3^x - 1)] = 6$

Đặt: $t = \log_3(3^x - 1)$, pt trở thành: $t(t + 1) = 6 \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -3 \end{cases}$

- Với $t = -3$: $\log_3(3^x - 1) = -3 \Leftrightarrow 3^x - 1 = \frac{1}{27} \Leftrightarrow 3^x = \frac{28}{27} \Leftrightarrow x = \log_3 \frac{28}{27}$
- Với $t = 2$: $\log_3(3^x - 1) = 2 \Leftrightarrow 3^x - 1 = 9 \Leftrightarrow 3^x = 10 \Leftrightarrow x = \log_3 10$

Các nghiệm tìm được thỏa điều kiện.

Vậy pt(1) có hai nghiệm là $x = \log_3 \frac{28}{27}; x = \log_3 10$

Bài 9: Giải phương trình: $\sqrt{\log_x \sqrt{7x}} \cdot \log_7 x = 1 \quad (1)$

Bài giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } (1) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2} \log_x (7x)} \cdot \log_7 x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\log_7 x}\right)} \cdot \log_7 x = 1$$

$$\text{Đặt } t = \log_7 x, \text{ pt trở thành: } \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t}\right)} \cdot t = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t}\right) \cdot t^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t^2 + t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

- Với $t = 1$: $\log_7 x = 1 \Leftrightarrow x = 7$ (thỏa điều kiện)

Vậy pt(1) có nghiệm là $x = 7$

Bài 10: Giải phương trình: $\log_{2x-1} (2x^2 + x - 1) + \log_{x+1} (2x - 1)^2 = 4$ (1)

Bài giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x^2 + x - 1 > 0 \\ 2x - 1 > 0 \\ 2x - 1 \neq 1 \\ x + 1 > 0 \\ x + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \\ x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \log_{2x-1} [(2x-1)(x+1)] + 2\log_{x+1} (2x-1) = 4 \\ \Leftrightarrow 1 + \log_{2x-1} (x+1) + 2 \frac{1}{\log_{2x-1} (x+1)} = 4$$

$$\text{Đặt } t = \log_{2x-1} (x+1), \text{ pt trở thành: } t + \frac{2}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

- Với $t = 1$: $\log_{2x-1} (x+1) = 1 \Leftrightarrow x+1 = 2x-1 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa điều kiện)
- Với $t = 2$: $\log_{2x-1} (x+1) = 2 \Leftrightarrow x+1 = (2x-1)^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$

Vậy pt(1) có tập nghiệm là $S = \left\{2; \frac{5}{4}\right\}$

Bài 11: Giải bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \geq 0$ (1)

Bài giải:

Điều kiện: $\frac{x^2 - 3x + 2}{x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 2 \end{cases}$

Khi đó:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \geq \log_{\frac{1}{2}} 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 2}{x} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 2 - \sqrt{2} \leq x \leq 2 + \sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

So với điều kiện ta được nghiệm của bpt(1) là $\begin{cases} 2 - \sqrt{2} \leq x < 1 \\ 2 < x \leq 2 + \sqrt{2} \end{cases}$

Bài 12: Giải bất phương trình: $\log_{0,7} \left(\log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} \right) < 0 \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $\begin{cases} \frac{x^2 + x}{x + 4} > 0 \\ \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x + 4} > 0 \\ \frac{x^2 + x}{x + 4} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2 + x}{x + 4} > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x + 4} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < -2 \\ x > 2 \end{cases}$

Khi đó:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \log_{0,7} \left(\log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} \right) < \log_{0,7} 1 \Leftrightarrow \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} > 1 \\ &\Leftrightarrow \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} > \log_6 6 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x}{x + 4} > 6 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x - 24}{x + 4} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < -3 \\ x > 8 \end{cases} \end{aligned}$$

So với điều kiện ta được nghiệm của bpt(1) là $\begin{cases} -4 < x < -3 \\ x > 8 \end{cases}$

Bài 13: Giải bất phương trình: $2 \log_3 (4x - 3) + \log_{\frac{1}{3}} (2x + 3) \leq 2 \quad (1)$

Bài giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 4x - 3 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{4} \\ x > -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{4}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \log_3 (4x - 3)^2 \leq 2 + \log_3 (2x + 3) \\ &\Leftrightarrow \log_3 (4x - 3)^2 \leq \log_3 [9(2x + 3)] \\ &\Leftrightarrow (4x - 3)^2 \leq 9(2x + 3) \\ &\Leftrightarrow 16x^2 - 42x - 18 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{3}{8} \leq x \leq 3 \end{aligned}$$

So với điều kiện ta được nghiệm của bpt(1) là $\frac{3}{4} < x \leq 3$

Bài 14: Giải bất phương trình: $9^{x^2-2x} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-x^2} \leq 3 \quad (1)$

Bài giải:

$$\text{Ta có: } 9^{x^2-2x} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-x^2} \leq 3 \Leftrightarrow 9^{x^2-2x} - 2 \cdot 3^{x^2-2x} - 3 \leq 0$$

$$\text{Đặt } t = 3^{x^2-2x} \quad (t > 0), \text{ bpt trở thành: } t^2 - 2t - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 3$$

Do $t > 0$ nên ta chỉ nhận $0 < t \leq 3$

$$\text{Với } 0 < t \leq 3: \quad 0 < 3^{x^2-2x} \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy bpt(1) có tập nghiệm là } S = [1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]$$

Bài 15: Giải bất phương trình: $\log_5 (4^x + 144) - 4 \log_5 2 < 1 + \log_5 (2^{x-2} + 1) \quad (1)$

Bài giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \log_5 (4^x + 144) - \log_2 16 < \log_5 [5(2^{x-2} + 1)] \\ &\Leftrightarrow \log_5 (4^x + 144) < \log_5 [80(2^{x-2} + 1)] \\ &\Leftrightarrow 4^x + 144 < 80(2^{x-2} + 1) \\ &\Leftrightarrow 4^x - 20 \cdot 2^x + 64 < 0 \\ &\Leftrightarrow 4 < 2^x < 16 \Leftrightarrow 2 < x < 4 \end{aligned}$$

Vậy bpt(1) có tập nghiệm là $S = (2; 4)$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Giải bất phương trình:

$$\log_{\frac{1}{3}} \left(\log_2 \frac{2x+3}{x+1} \right) \geq 0$$

Bài 2: Giải phương trình:

$$3 + \frac{1}{\log_3 x} = \log_x \left(9x - \frac{6}{x} \right)$$

Bài 3: Giải phương trình:

$$2 \log_2 (2x+2) + \log_{\frac{1}{2}} (9x-1) = 1$$

Bài 4: Giải bất phương trình:

$$3^{2x+1} - 2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x \leq 0$$

Bài 5: Giải bất phương trình:

$$2^{2x^2-4x-2} - 16 \cdot 2^{2x-x^2-1} - 2 \leq 0$$

-----Hết-----